



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

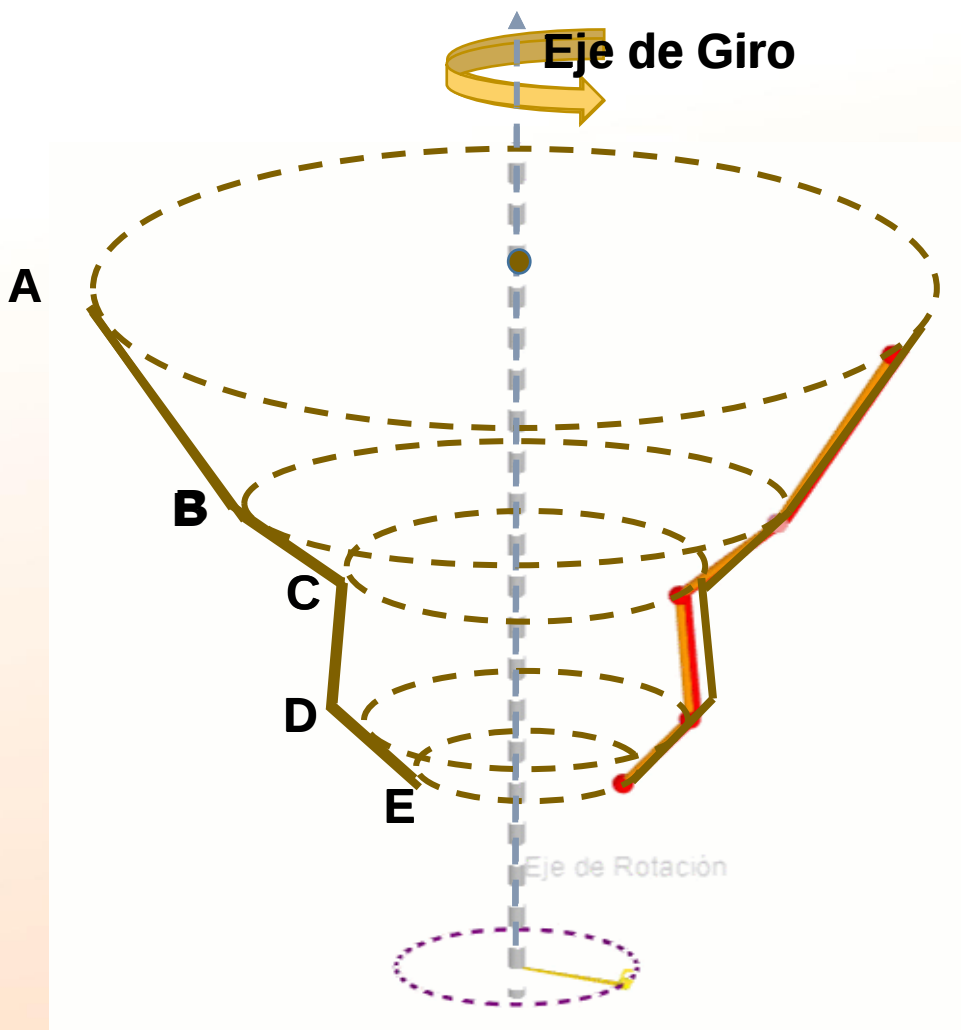
SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

**CICLO
PRE
2024-1**



SUPERFICIE REVOLUCIÓN

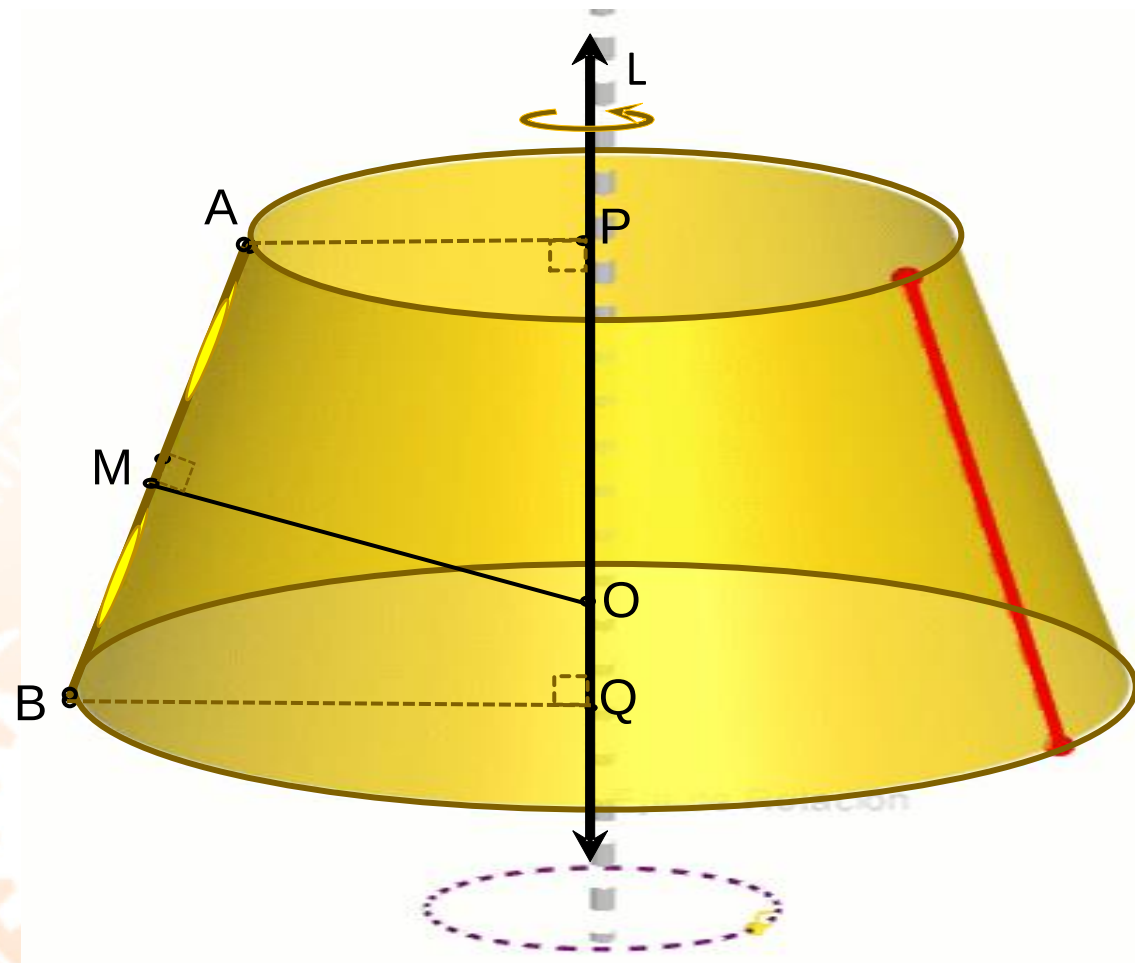
Definición.- Se denomina **superficie de revolución** a la superficie que se genera por la rotación de una línea plana (recta y/o curva) alrededor de una recta coplanar denominado eje de giro.



ce
pre
UNI

ÁREA DE LA SUPERFICIE GENERADA POR LA REVOLUCIÓN DE UN SEGMENTO ALREDEDOR DE UN EJE COPLANAR

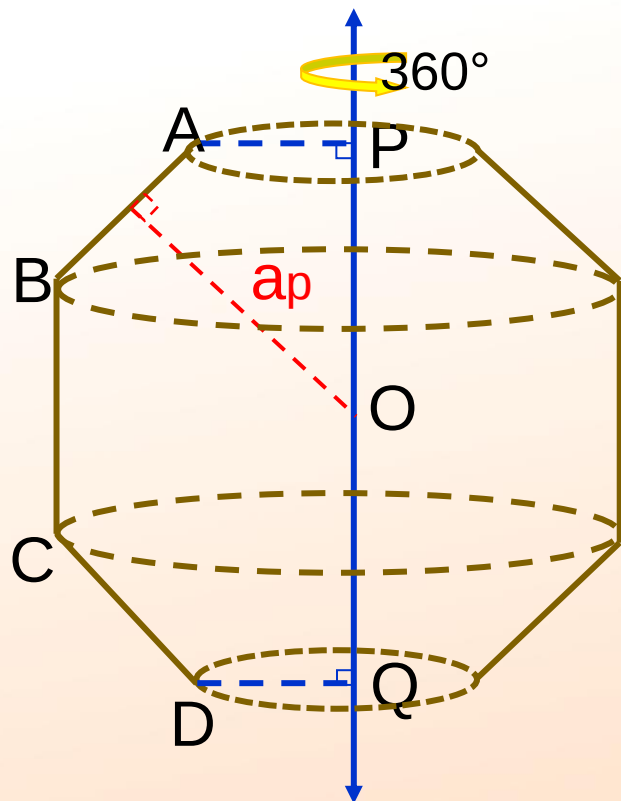
Teorema.- El área de la superficie generada por la revolución de un segmento alrededor de un eje coplanar con dicho segmento, es igual; al producto de la longitud de la proyección ortogonal del segmento sobre el eje, por la longitud de la circunferencia cuyo radio es el segmento de mediatriz de dicho segmento comprendido entre el eje y el segmento dado.



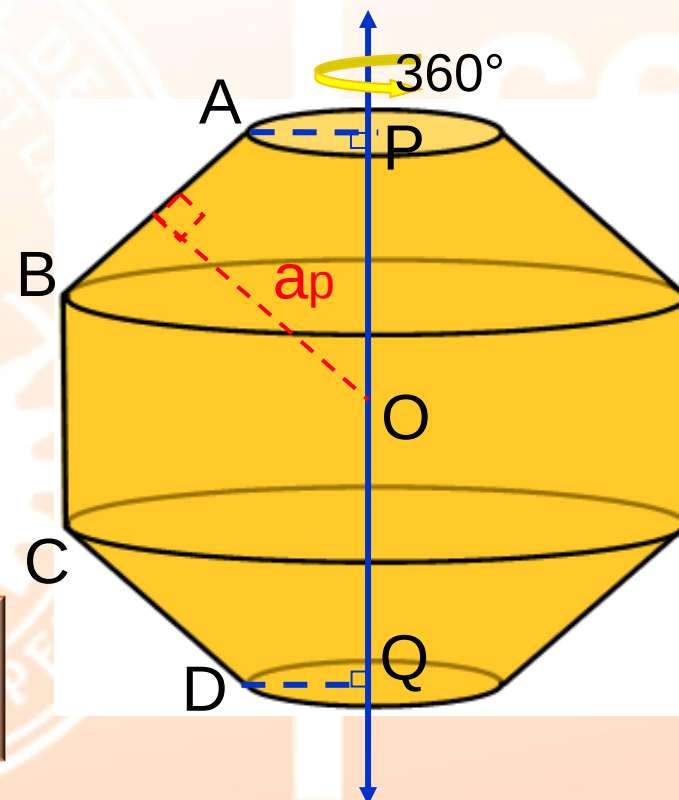
$$A = 2\pi(OM)(PQ)$$

SUPERFICIE GENERADA POR LA REVOLUCIÓN DE UNA POLIGONAL REGULAR

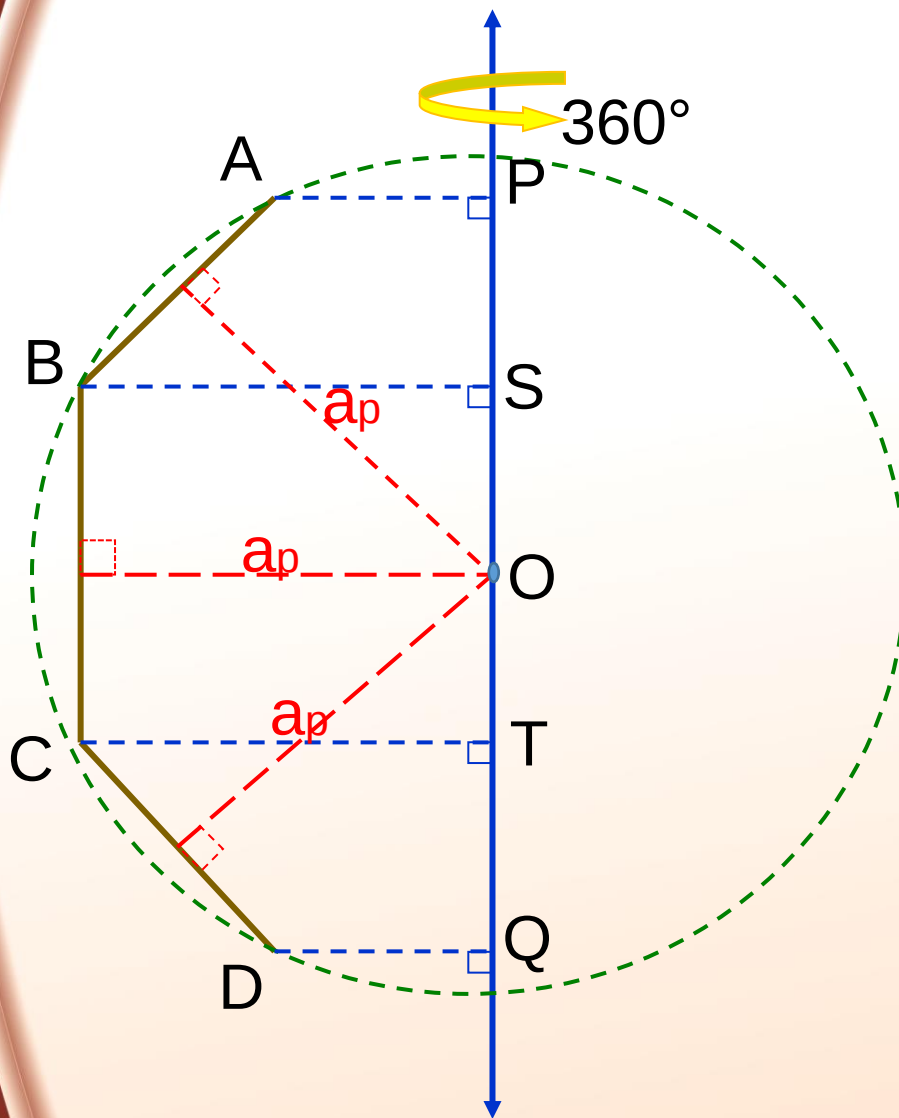
Teorema de Arquímedes.- El área de la superficie generada por la revolución de una poligonal regular alrededor de un eje coplanar con ella y que pasa por su centro, es igual al producto de la longitud de su proyección ortogonal de la poligonal regular sobre el eje, por la longitud de la circunferencia cuyo radio es la apotema de la poligonal regular.



$$A = (2\pi a_p)PQ$$



Demostración:



S_{ABCD} = Área generada por la rotación de la poligonal ABCD regular alrededor del eje de giro

$$S_{ABCD} = S_{AB} + S_{BC} + S_{CD}$$

$$S_{ABCD} = 2\pi(PS)(a_p) + 2\pi(ST)(a_p) + 2\pi(TQ)(a_p)$$

$$S_{ABCD} = 2\pi(PS + ST + TQ)(a_p)$$

$$S_{ABCD} = 2\pi(PQ)(a_p)$$



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

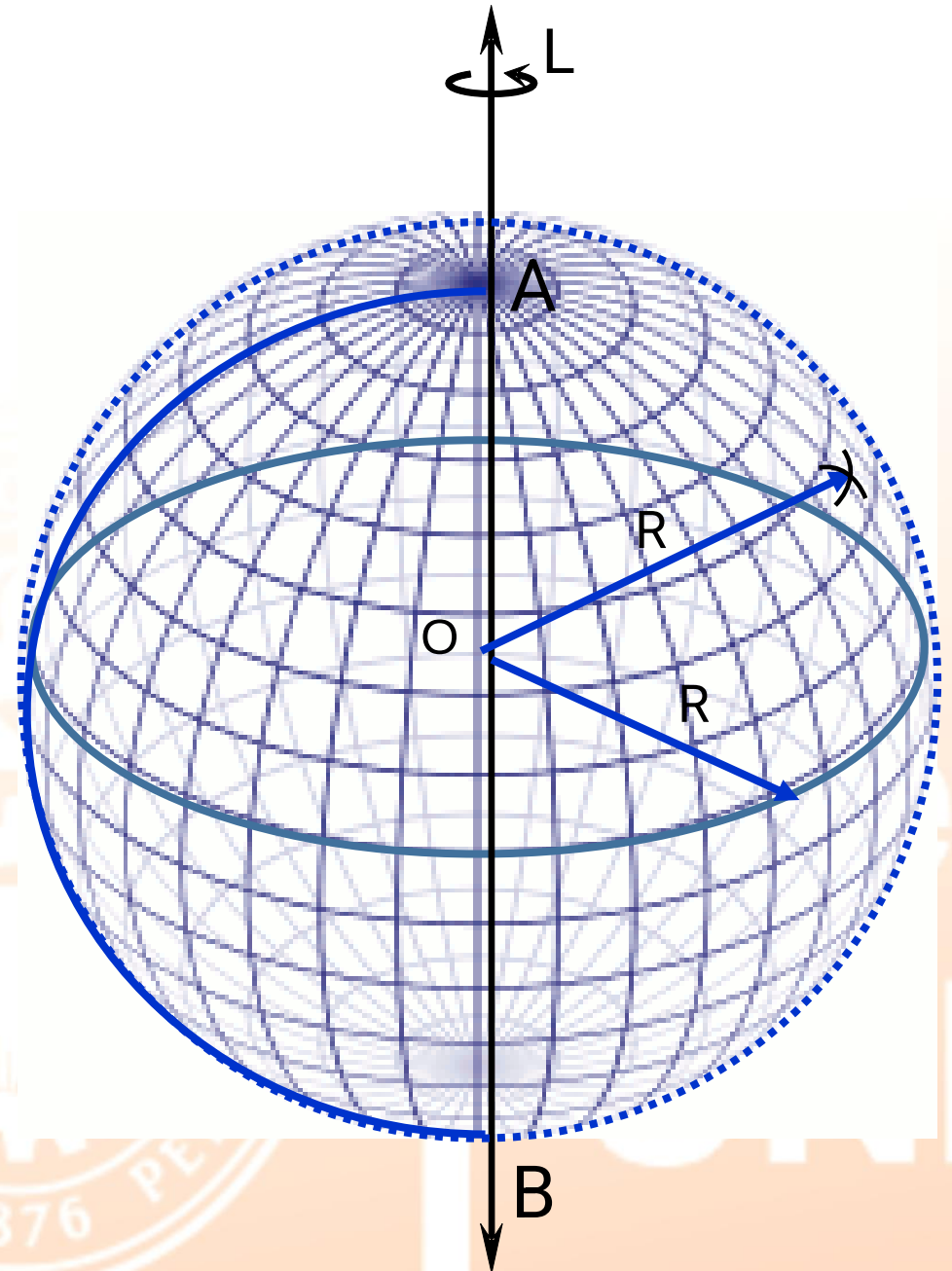
SUPERFICIE ESFÉRICA

**CICLO
PRE
2024-1**



SUPERFICIE ESFÉRICA

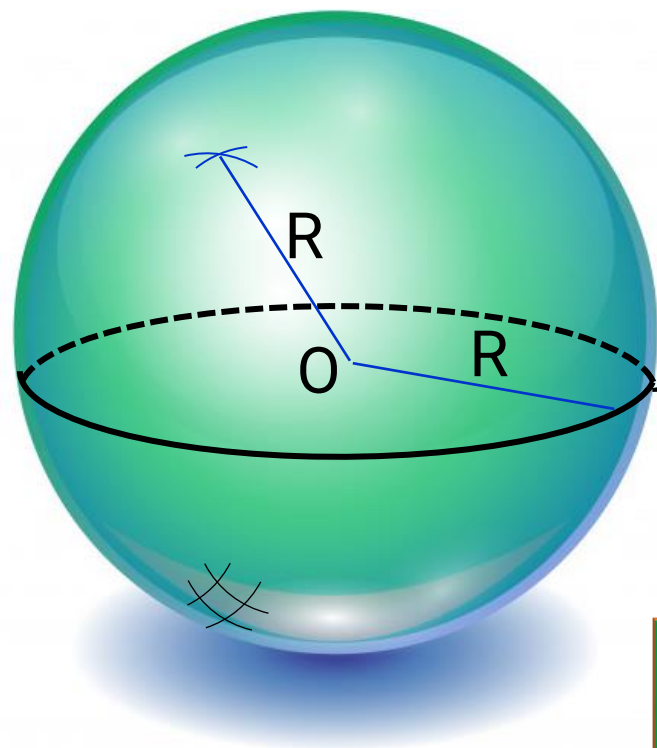
Definición.- Se denomina **superficie esférica**, a la superficie generada por la revolución de una semicircunferencia alrededor de un eje que contiene al diámetro.



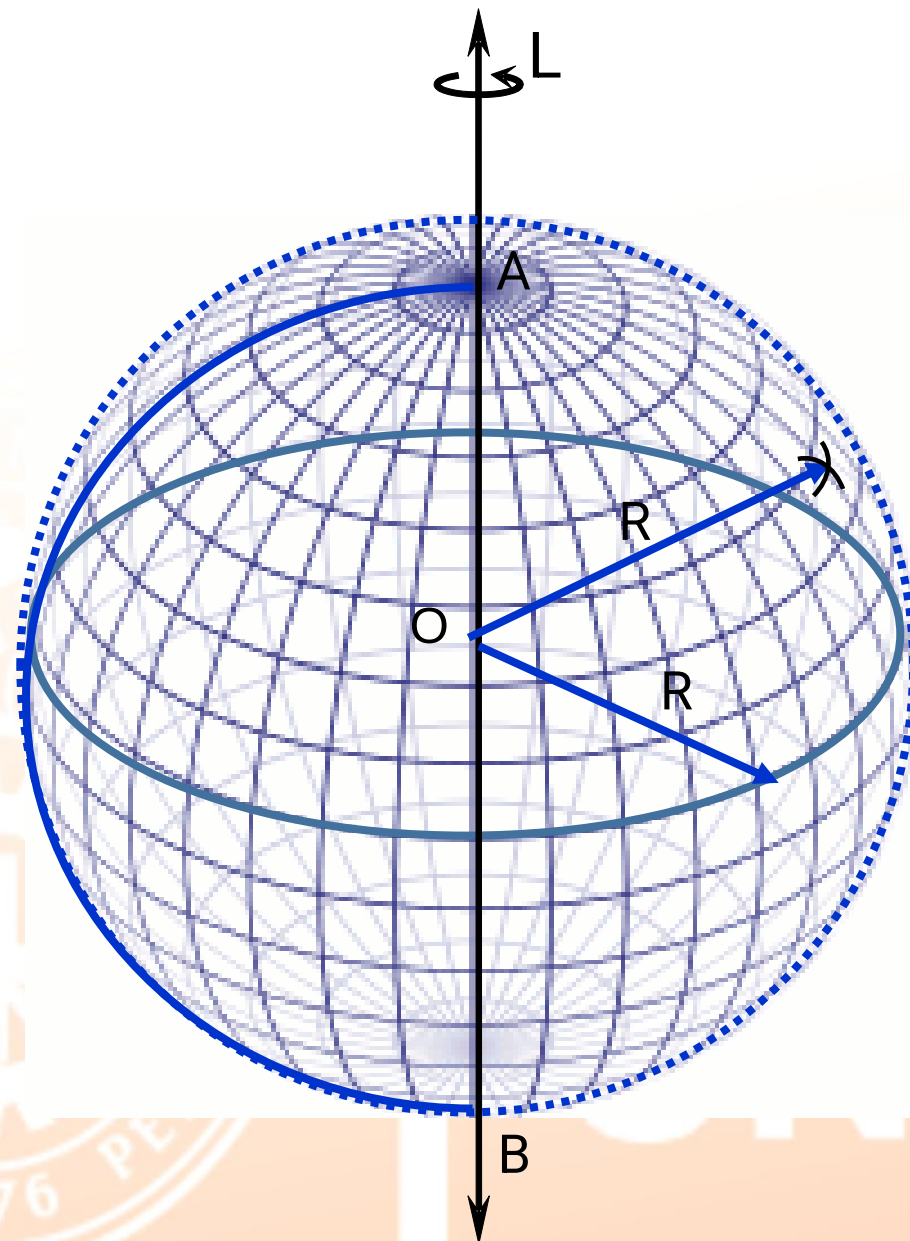
Área de la Superficie Esférica

Teorema.

El área de la superficie esférica es igual al cuádruplo del área de uno de sus círculos máximos.

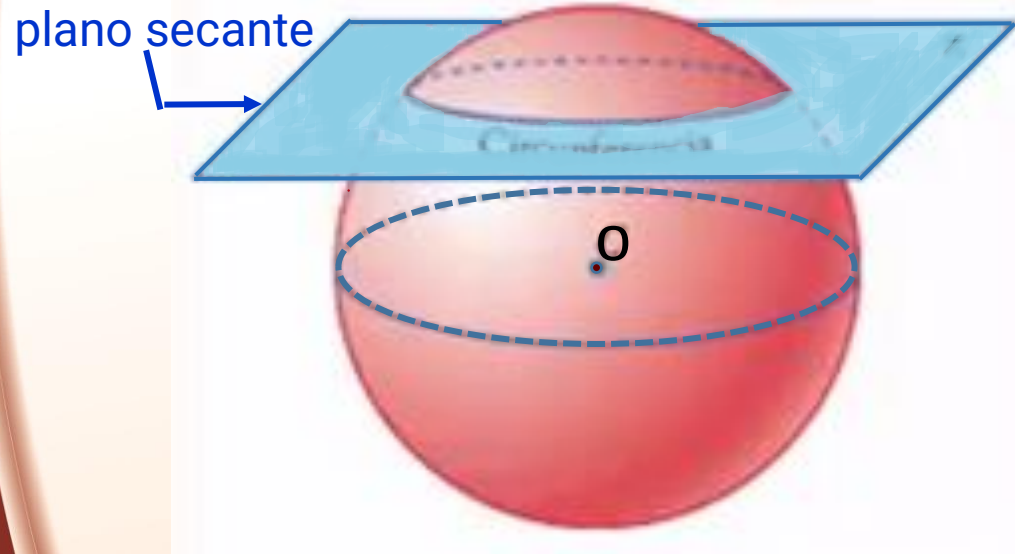


$$A = 4\pi R^2$$

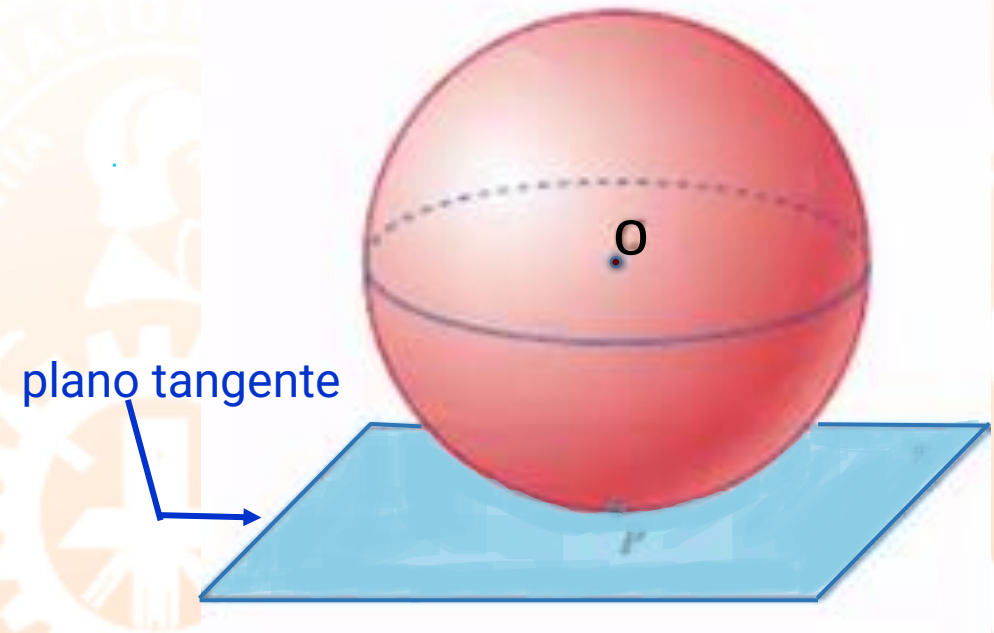


PLANO SECANTE, PLANO TANGENTE

Definición.- Un plano es secante a una superficie esférica cuando la interseca en más de un punto.



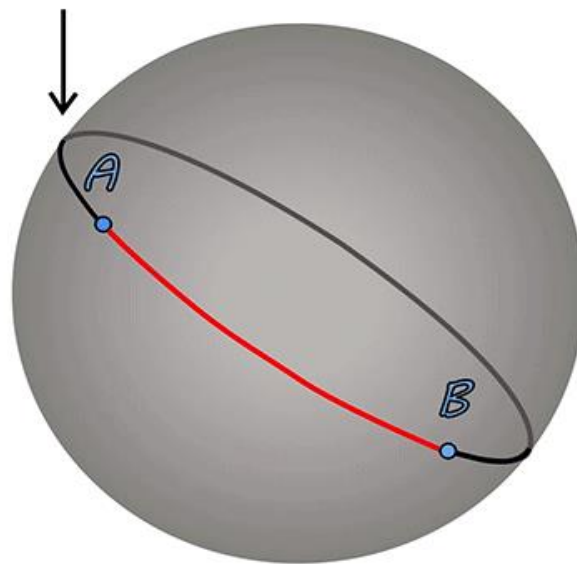
Definición.- Un plano es tangente a una superficie esférica cuando la intersección es un punto.



CIRCUNFERENCIA MÁXIMA

Definición.- La intersección de una superficie esférica con un plano que pasa por su centro, se llama **circunferencia máxima** de la superficie esférica. Si el plano secante no pasa por el centro de la superficie esférica su intersección se denomina **circunferencia menor**.

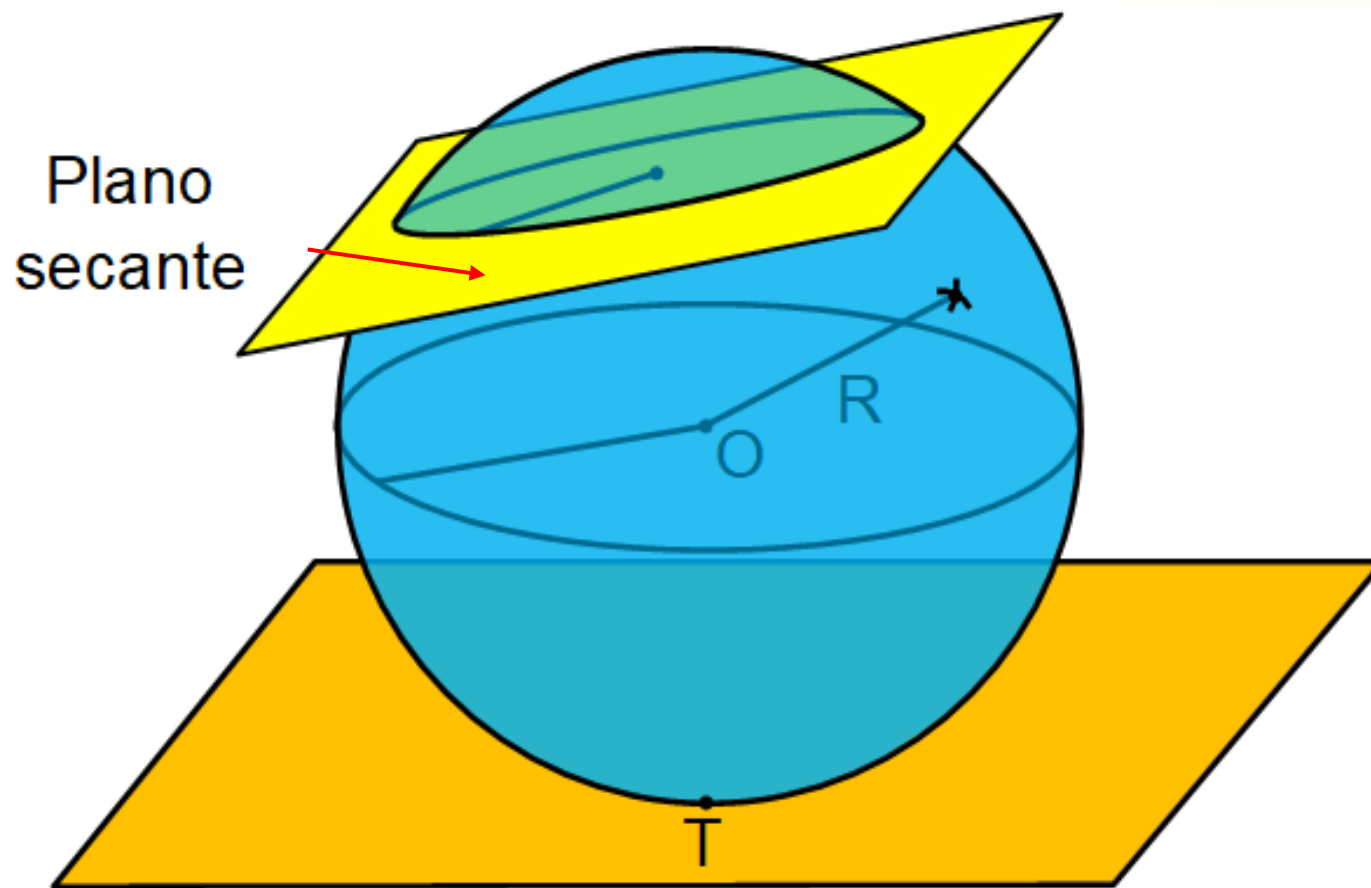
circunferencia máxima



ce
pre
UNI

TEOREMA

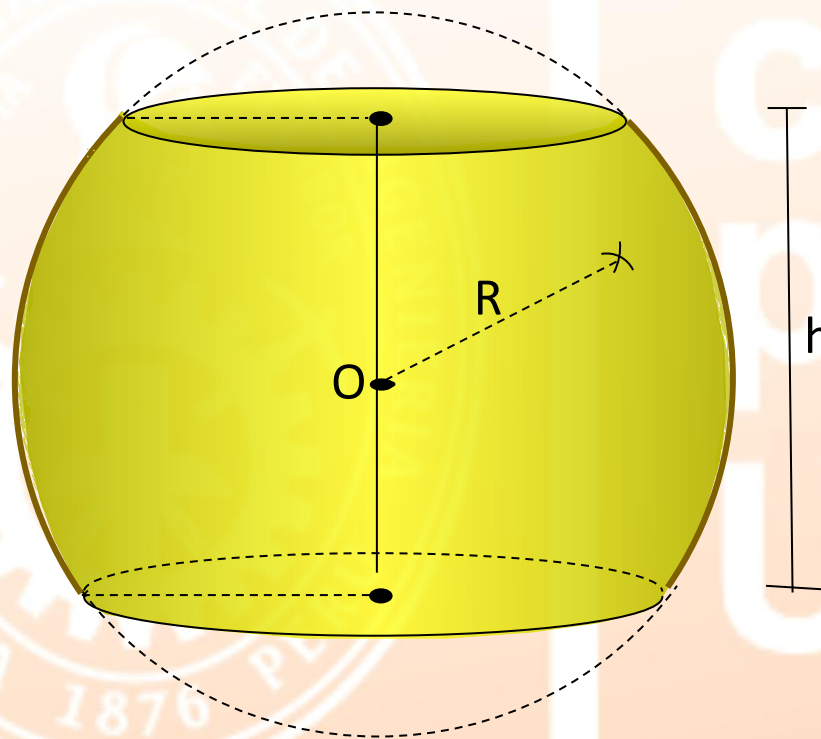
Si un plano interseca a una superficie esférica en más de un punto, entonces la intersección es una circunferencia.


ce
pre
UNI

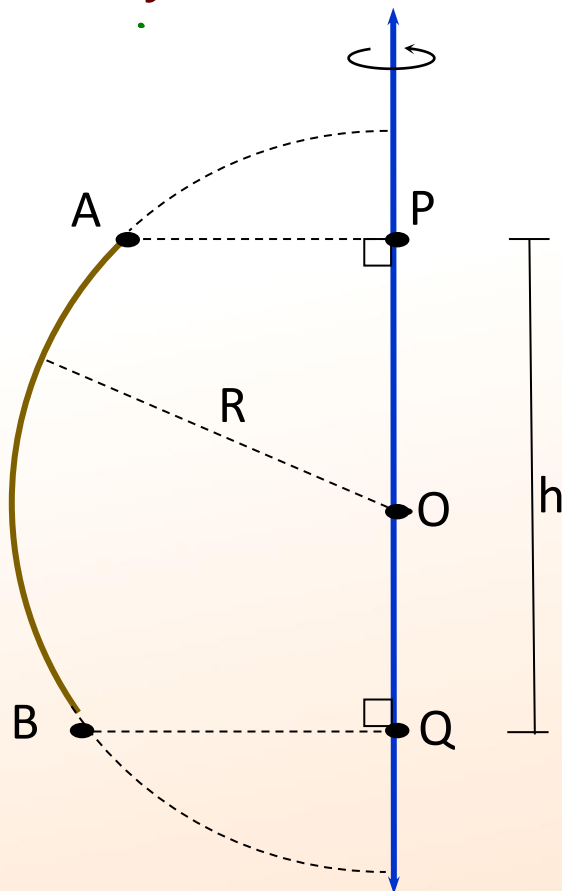
ZONA ESFÉRICA

Definición.- Se denomina **zona esférica** a la parte de una superficie esférica comprendida entre dos circunferencias determinadas por dos planos paralelos entre si, secantes a la superficie esférica.

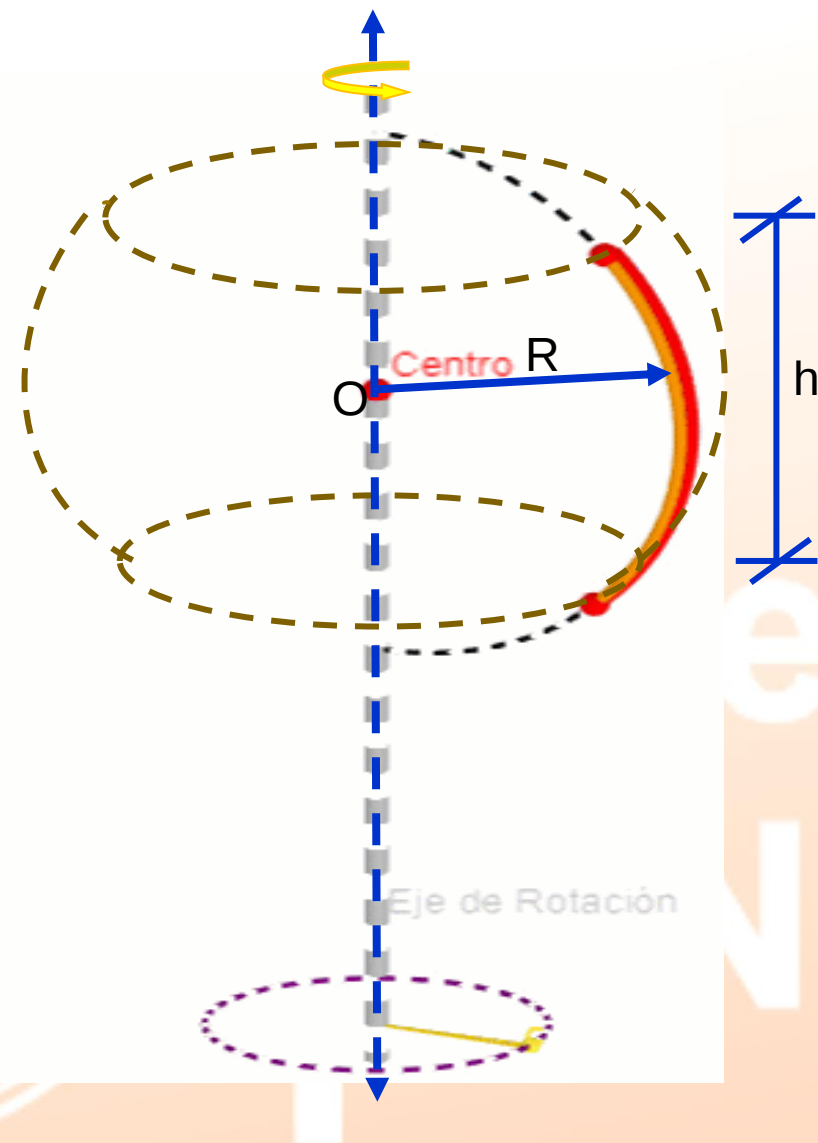
$$A = (2\pi R)h$$



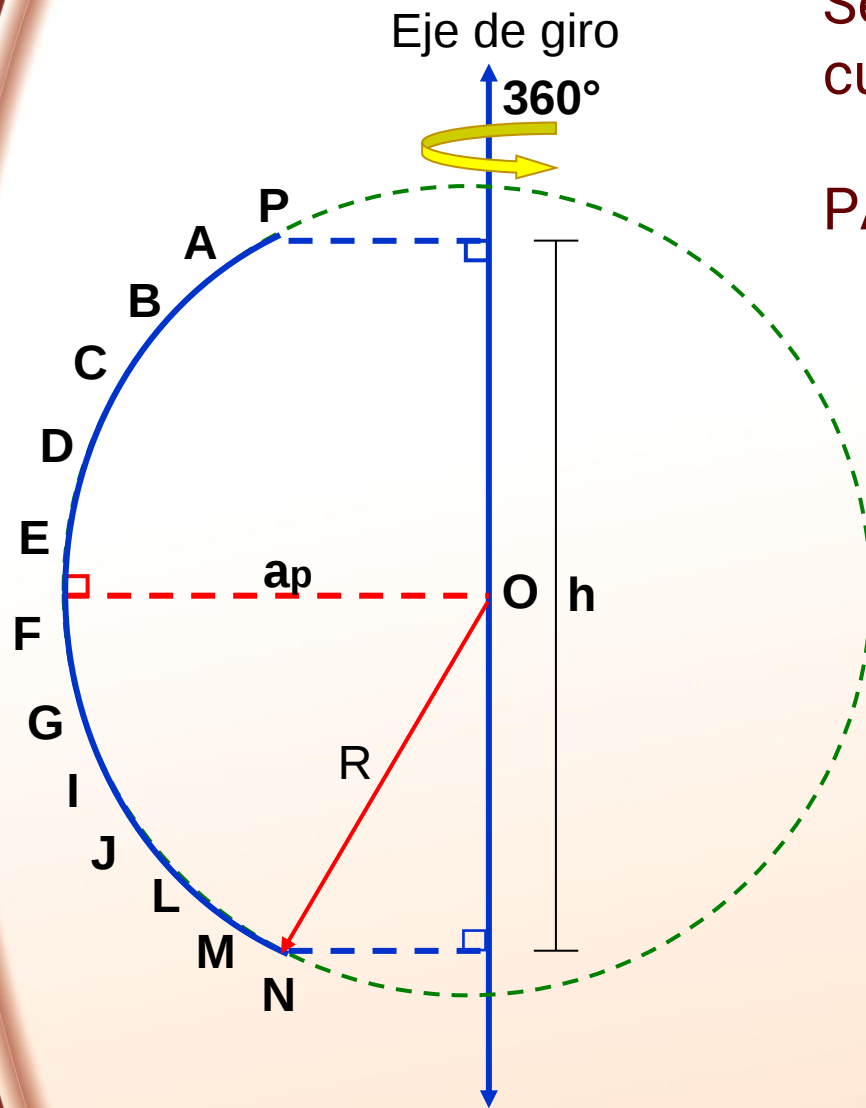
Teorema.- El área de una **zona esférica** es igual al producto de las longitudes de una circunferencia máxima de la superficie esférica que lo contiene y la altura de la zona esférica.



$$S_{\text{zona}} = 2\pi(R)h$$



Demostración:



Sea la poligonal regular PABCDEF...LMN formada por n cuerdas

$$PA = AB = BC = CD = DE = FE = \dots = JL = ML = MN = \ell$$

$$S_{PABC\dots LMN} = 2\pi(ap)h$$

Si el número de lados de la poligonal regular aumenta infinitamente, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (PA + AB + BC + \dots + MN) = \widehat{PN}$$

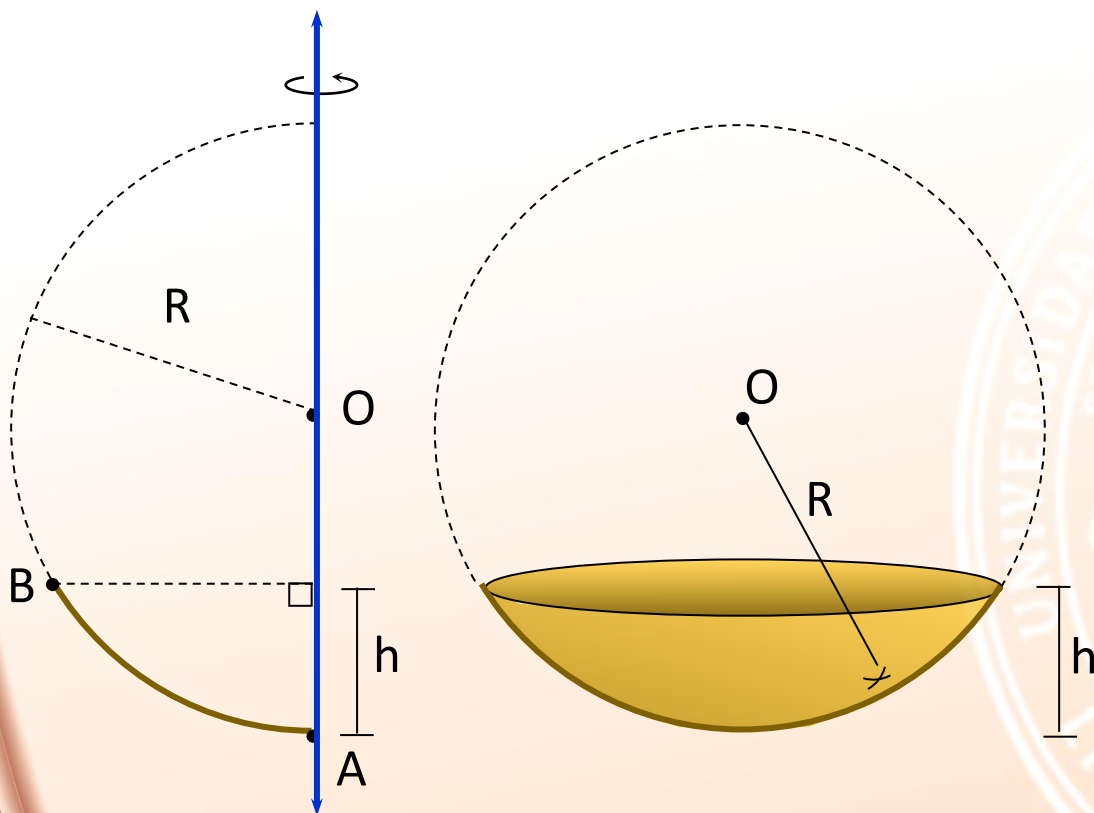
Luego: $ap \rightarrow R$

Donde R es el radio de la circunferencia

$$S_{zona} = 2\pi(R)h$$

CASQUETE ESFÉRICO

Definición.- Se denomina **casquete esférico** a la parte de una superficie esférica determinado por un plano secante.



Teorema.- El área de un casquete esférico es igual al producto de las longitudes de una circunferencia máxima de la superficie esférica que lo contiene y la altura del casquete esférico.

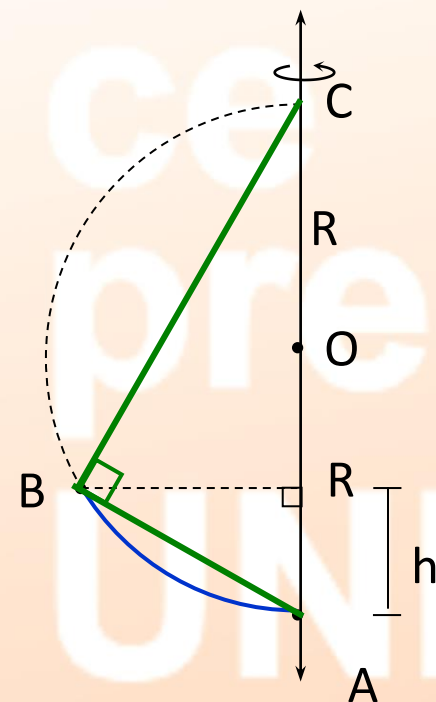
$$S_{\text{casq esf}} = (2\pi R)h$$

$$S_{\text{casq esf}} = 2\pi(R)(h)$$

ΔABC triángulo rectángulo

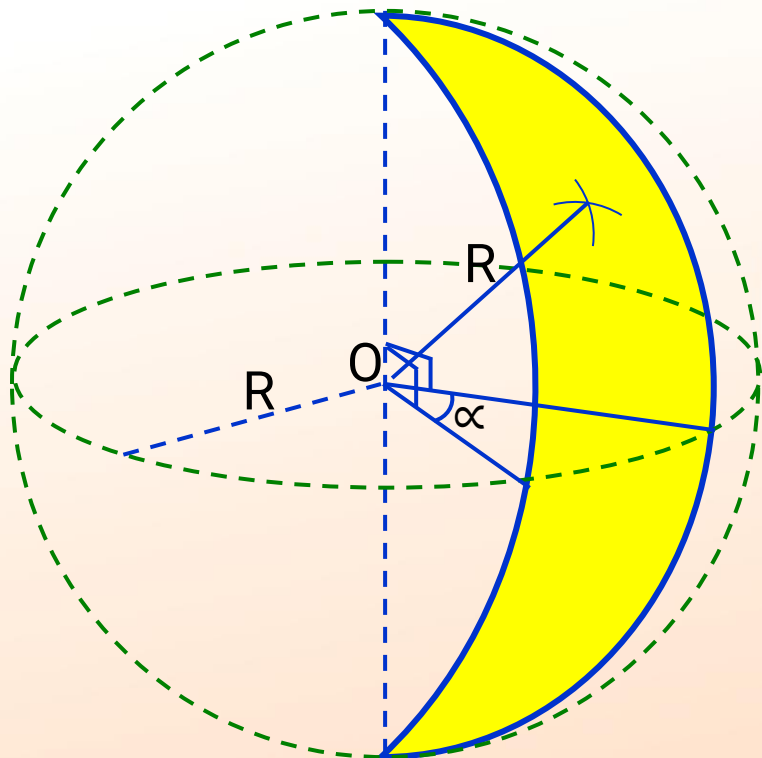
$$AB^2 = (2R)(h)$$

$$S_{\text{casq esf}} = \pi AB^2$$



HUSO ESFÉRICO

Definición.- Se denomina **huso esférico** a la parte de una superficie esférica, comprendida entre dos semicircunferencias máximas que tienen en común el diámetro de la superficie esférica.



Teorema.- El área de un huso esférico cuyo radio de la superficie esférica que lo contiene mide R y el ángulo diedro correspondiente mide α es igual a $\left(\frac{\alpha}{90}\right) \pi R^2$

Ángulo Central Área de la superficie

$$360^\circ \text{ ----- } 4\pi R^2$$

$$\alpha \text{ ----- } S_{\text{HUSO}}$$

$$S_{\text{HUSO}} = 4\pi R^2 \left(\frac{\alpha}{360} \right)$$

Donde :

α es la medida del ángulo del huso o ángulo de giro.



ce
pre
UNI

**MATERIAL DE
ESTUDIO**

Geometría

EJERCICIOS PROPUESTOS

**CICLO
PRE
2024-1**



PROBLEMA 251

Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. La superficie generada por la rotación de un segmento alrededor de un eje coplanar es una superficie cilíndrica.
- II. Si tres segmentos congruentes giran alrededor de un eje coplanar, las superficies determinadas tienen igual área.
- III. Dos segmentos de diferentes longitudes pueden generar, al girar alrededor de un eje coplanar, superficies de igual área.

A) VFV

B) FVF

C) FFV

D) VVV

E) FFF

PROBLEMA 253

Al trazar un plano perpendicular al radio de una superficie esférica de radio R , se determina dos casquetes tal que la diferencia de sus áreas es igual al área de la sección determinada en el plano. Calcule la altura del menor casquete esférico.

A) $\frac{R(3-\sqrt{5})}{2}$

C) $R(3-\sqrt{5})$

D) $R(4-\sqrt{5})$

B) $\frac{R(4-\sqrt{5})}{2}$

E) $R(5-\sqrt{5})$

PROBLEMA 254

En una superficie esférica, el área de un huso esférico es la quinta parte del área de la superficie esférica. ¿Cuánto mide el diedro correspondiente al huso esférico?

A) 30

B) 45

C) 60

D) 70

E) 72

PROBLEMA 256

En una superficie esférica se traza dos planos que trisecan perpendicularmente a un radio. Calcule la razón entre las áreas de la superficie esférica y la zona esférica determinada.

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

PROBLEMA 257

Se tiene un hexaedro regular inscrito en una superficie esférica. El plano que contiene a una de las caras determina dos casquetes esféricos. Si la arista del hexaedro mide $2u$, entonces el área (en u^2) del menor casquete esférico determinado es

A) $2\pi(3-\sqrt{3})$

D) $\pi(6-\sqrt{3})$

B) $3\pi(2-\sqrt{2})$

C) $3\pi(3-\sqrt{2})$

E) $3\pi(3-\sqrt{6})$

PROBLEMA 258

En una superficie esférica, una zona esférica y un huso esférico son equivalentes tal que el diámetro del huso contiene a la altura de la zona esférica que mide h . ¿Cuál es el área de la intersección de la zona esférica y el huso esférico?

A) $\frac{\pi h^2}{2}$

B) $\frac{\pi h^2}{4}$

C) $\frac{\pi h^2}{6}$

D) $\frac{\pi h^2}{3}$

E) πh^2

PROBLEMA 259

En un cono circular recto la generatriz y el diámetro de la circunferencia de la base son congruentes. Si el área del menor casquete esférico determinado por la superficie lateral del cono en una superficie esférica inscrita en el cono es igual a S , entonces el área del casquete mayor es

A) $2S$

B) $\frac{3}{2}S$

C) $\frac{5}{2}S$

D) $3S$

E) $4S$

PROBLEMA 263

Desde un punto P exterior a una superficie esférica, se trazan todas las rectas tangentes a dicha superficie, determinándose un cono circular recto cuya generatriz es congruente con el diámetro de la circunferencia de su base. Si el volumen del sólido determinado por el cono es $81\pi u^3$, entonces el área (en u^2) del menor casquete esférico determinado es

A) 28π

B) 30π

C) 32π

D) 36π

E) 42π